Prof. Dr. Alfred Toth

Berechnung der Anzahl von Zeichenklassen von Semiotiken über $ZR_{n,n}$ und $ZR_{n,n-1}$

1. Die maximale Anzahl von Zeichenrelationen einer n-adischen n-atomischen Semiotik, wofür wir abkürzend „einer Semiotik über $ZR_{n,n}$“ sagen wollen, beträgt natürlich im theoretischen Maximalfalle

$$|ZR_{n,n}| = n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

also etwa $|ZR_{3,3}| = 3^3 = 27$, $|ZR_{4,4}| = 4^4 = 256$, $|ZR_{5,5}| = 5^5 = 625$, usw.

Nun müssen aber Zeichenklassen im Gegensatz zu blossen Zeichenrelationen einem inklusiven semiotischen Ordnungsprinzip gehorchen, das, informal formuliert, besagt, dass die n-atomischen Stellenwerte von Subzeichen von links nach rechts in einer retrosemiosisch, d.h. degenerativ geordneten Zeichenrelation $ZR_{m,n}$ gleich wie oder grösser als Stellenwerte der Subzeichen links vor ihnen sein müssen. Allgemein formuliert:

$$ZR = ((n.m), (n+1.m+1), (n+2.m+2), (n+3.m+3), \ldots) \text{ mit } (m+1) \leq (m+2) \leq (m+3) \leq \ldots \text{ und } n > (n+1) > (n+2) > \ldots$$

Z.B. ist also für $ZR_{3,3}$ eine Zeichenrelation wie (3.2 2.2 1.3) eine Zeichenklasse, Zeichenrelationen wie (3.3 2.2 1.1), (3.3 2.3 1.2) oder (3.2 2.1 1.3) dagegen sind keine Zeichenklassen.

2. Durch n-atomische semiotische Ordnungen werden nun natürlich die Mengen der Zeichenklassen über einer Zeichenrelation stark eingeschränkt. In Toth (2008a, S. 186 ff.) wurde gezeigt, dass die Anzahlen von Zeichenklassen über $ZR_{n,n}$ für n = 3, 4, 5 und 6 die Zahlen 10, 35, 126, 462 sind, die auch als der Anfang der 2-, 3-, 4- und 5-dimensionalen Zahlen bekannt sind, welche eine Teilmenge der figurativen oder mehrdimensionalen Zahlen bilden, worunter man bekanntlich natürliche Zahlen versteht, die „Anzahlen von Punkten darstellen, welche gleichmäßig auf den Ecken, den Seiten und im Innern von regelmässigen ebenen oder räumlichen Figuren verteilt sind“ (Flachsmeyer 1969, S. 74). Mehrdimensionale Zahlen lassen sich am einfachsten mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks darstellen:

0 1

1 1 1

2 1 2 1

3 1 3 3 1

4 1 4 6 4 1

5 1 5 **10** 10 5 1

6 1 6 15 20 15 6 1

7 1 7 21 **35** 35 21 7 1

8 1 8 28 56 70 56 28 8 1

9 1 9 36 84 **126** 126 84 36 9 1

10 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

11 1 11 55 165 330 **462** 462 330 165 55 11 1

12 1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1 ...

.

.

.

Sie lassen sich nicht aber nur aus dem Pascalschen Dreieck ablesen, sondern auch durch einfache Formeln berechnen:

Dreieckszahlen:	1, 3, 6, **10**, 15, 21, 28, 36, 45, 55, … $\frac{1}{2}$ n (n + 1)
Tetraederzahlen:	1, 4, 10, 20, **35**, 56, 84, 120, 165, 220, … 1/6 n (n + 1) (n + 2)
4-dimensionale Zahlen:	1, 5, 15, 35, 70, **126**, 210, 330, 495, 715, … 1/24 n (n + 1) (n + 2) (n + 3)
5-dimensionale Zahlen:	1, 6, 21, 56, 126, 252, **462**, 792, 1287, 2002, … 1/120 n (n + 1) (n + 2) (n + 3) (n + 4)

3. Bis hierher haben wir aber nur die Anzahl von Zeichenklassen über $ZR_{n,n}$ betrachtet, d.h. Zeichenklassen, deren n-adische Werte gleich den n-atomischen Werten sind. Nun stellt aber die in Toth (2008b, c) eingeführte präsemiotische Zeichenrelation $ZR_{4,3}$ einen Fall von $ZR_{n,n-1}$ dar. Da hier also die n-atomischen Werte um den Repräsentationswert 1 gegenüber den n-adischen Werten vermindert sind, stellt sich die Frage, wie man die Anzahl der Zeichenklassen (also nicht der Zeichenrelationen!) über einem $ZR_{n,n-1}$ berechnen kann. Hierzu wollen wir uns zuerst den Aufbau der Systeme der Zeichenklassen über $ZR_{4,3}$ sowie $ZR_{5,4}$ anschauen.

I. Aufbau der Semiotik über $ZR_{4,3}$

1. Vollständiger Aufbau der triadischen Partialrelation (2.1 1.1 0.1)

3.1 2.1 1.1 0.1			
3.1 2.1 1.1 0.2			
3.1 2.1 1.1 0.3			

3.1 2.1 1.2 0.2	3.1 2.2 1.2 0.2		
3.1 2.1 1.2 0.3	3.1 2.2 1.2 0.3		
-----------------	-----------------		
3.1 2.1 1.3 0.3	3.1 2.2 1.3 0.3	3.1 2.3 1.3 0.3	$\sum = 6 + 3 + 1 = 10$
-----------------	-----------------	-----------------	

2. Vollständiger Aufbau der triadischen Partialrelation (2.2 1.2 0.2)

	3.2 2.2 1.2 0.2		
	3.2 2.2 1.2 0.3		

	3.2 2.2 1.3 0.3	3.2 2.3 1.3 0.3	$\sum = 3 + 1 = 4$
	-----------------	-----------------	

3. Vollständiger Aufbau der triadischen Partialrelation (2.3 1.3 0.3)

		3.3 2.3 1.3 0.3	$\sum = 1$

Die Anzahl von Zeichenklassen über $ZR_{4,3}$ beträgt also 10 + 4 + 1 = 15.

II. Aufbau der Semiotik über $ZR_{5,4}$

1. Vollständiger Aufbau der tetradischen Partialrelation (3.1 2.1 1.1 0.1)

3.1 2.1 1.1 0.1			
3.1 2.1 1.1 0.2			
3.1 2.1 1.1 0.3			
3.1 2.1 1.1 0.4			

3.1 2.1 1.2 0.2	3.1 2.2 1.2 0.2		
3.1 2.1 1.2 0.3	3.1 2.2 1.2 0.3		
3.1 2.1 1.2 0.4	3.1 2.2 1.2 0.4		
-----------------	-----------------		
3.1 2.1 1.3 0.3	3.1 2.2 1.3 0.3	3.1 2.3 1.3 0.3	
3.1 2.1 1.3 0.4	3.1 2.2 1.3 0.4	3.1 2.3 1.3 0.4	
-----------------	-----------------	-----------------	
3.1 2.1 1.4 0.4	3.1 2.2 1.4 0.4	3.1 2.3 1.4 0.4	3.1 2.4 1.4 0.4
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

$\sum = 10 + 6 + 3 + 1 = 20$

2. Vollständiger Aufbau der tetradischen Partialrelation (3.2 2.2 1.2 0.2)

3.2 2.2 1.2 0.2			
3.2 2.2 1.2 0.3			
3.2 2.2 1.2 0.4			

3.2 2.2 1.3 0.3	3.2 2.3 1.3 0.3		
3.2 2.2 1.3 0.4	3.2 2.3 1.3 0.4		
-----------------	-----------------		
3.2 2.2 1.4 0.4	3.2 2.3 1.4 0.4	3.2 2.4 1.4 0.4	$\sum = 6 + 3 + 1 = 10$
-----------------	-----------------	-----------------	

3. Vollständiger Aufbau der tetradischen Partialrelation (3.3 2.3 1.3 0.3)

3.3 2.3 1.3 0.3		
3.3 2.3 1.3 0.4		

3.3 2.3 1.4 0.4	3.3 2.4 1.4 0.4	$\sum = 3 + 1 = 4$
-----------------	-----------------	

4. Vollständiger Aufbau der tetradischen Partialrelation (3.4 2.4 1.4 0.4)

3.4 2.4 1.4 0.4	$\sum = 1$

Die Anzahl von Zeichenklassen über $ZR_{5,4}$ beträgt also 20 + 10 + 4 + 1 = 35

Damit haben wir also

Für $ZR_{4,3}$:

6 + 3 + 1	3 + 1	1	
10	4	1	$\sum = 15$

Für $ZR_{5,4}$:

10 + 6 + 3 + 1	6 + 3 + 1	3 + 1	1	
20	10	4	1	$\sum = 35$

Entsprechend könnten wir für $ZR_{6,5}$ leicht verifizieren:

15 + 10 + 6 + 3 + 1	10 + 6 + 3 + 1	6 + 3 + 1	3 + 1	1	
35	20	10	4	1	$\sum = 69$

So dass wir also wie folgt die Anzahl der Zeichenklassen einer Semiotik über $ZR_{n,n-1}$ berechnen können:

1. Wir nehmen die ersten m Glieder der Dreieckszahlen entsprechend m = n-1, d.h. des trichotomischen Wertes von $ZR_{n,n-1}$ und addieren sie.

2. Wir nehmen die ersten m-1 Glieder der Dreieckszahlen wie oben und addieren sie. Anschliessend fahren wir in derselben Weise fort mit den ersten m-2, m-3, ..., Dreieckszahlen, wobei die Anzahl der Summanden wiederum dem trichotomischen Wert von $ZR_{n,n-1}$ entspricht.

3. Die Addition der n-1 Teilsummen entsprechend $ZR_{n,-n-1}$ ist die gesuchte Anzahl von Zeichenklassen der Semiotik über $ZR_{n,n-1}$.

4. Ein weiterer interessanter Zusammenhang der mehrdimensionalen Zahlen einerseits und der Anzahlen von Zeichenklassen über $\mathbf{ZR_{n,n-1}}$ andererseits ergibt sich zu den Anzahlen der Trichotomien von Semiotiken über $ZR_{n,n}$. Wie wir in Toth (2008a, S. 177 ff.) gezeigt hatten, findet in der triadisch-trichotomischen Semiotik Trichotomienwechsel zwischen der 6. und der 7. sowie zwischen der 9. und 10. Zkl×Rth statt. Die 10 triadischen Zkln×Rthn unterteilen sich also in 3 Trichotomien, und zwar in eine mit 6 Zkln×Rth, in eine mit 3 Zkln×Rthn und in eine mit 1 Zkl×Rth. In der tetradisch-tetratomischenen Semiotik findet Trichotomienwechsel zwischen der 20. und der 21., zwischen der 30. und der 31. und zwischen der 34. und der 35. Zkl×Rth statt. Die 35 tetradischen Zkl×Rth unterteilen sich somit in 4 Trichotomien, und zwar in eine mit 20 Zkl×Rth, in eine mit 10, in eine mit 4 und in eine mit 1 Zkl×Rth. Stellen wir diese Anzahlen mit den entsprechenden Anzahlen in der pentadisch-pentatomischen und der hexadisch-hexatomischen Semiotik zusammen:

Triadische Semiotik: 3 Trichotomien; Anzahlen: 6, **3**, 1

Tetradische Semiotik: 4 Trichotomien; Anzahlen: 20, 10, **4**, 1

Pentadische Semiotik: 5 Trichotomien; Anzahlen: 70, 35, 15, **5**, 1

Hexadische Semiotik: 6 Trichotomien; Anzahlen: 252, 126, 56, 21, **6**, 1

dann erkennt man leicht, dass die Anzahlen der Trichotomien der ersten n für $n \leq 6$ wieder die ersten n-dimensionalen Zahlen für $n \leq 5$ sind, nur in umgekehrter Reihenfolge. Offenbar gibt also die jeweils zweite n-dimensionale Zahl die Anzahl der Trichotomien einer n+1-

adischen n+1-atomischen Semiotik an. Noch wichtiger ist aber in unserem Zusammenhang, dass die ersten 3 Glieder der Dreieckszahlen, vermehrt um das 2. Glied der Tetraederzahlen, das 3. Glied der 4-dimensionalen Zahlen, das 4. Glied der 5-dimensionalen Zahlen, allgemein also: das (n-1)-te Glied der n-dimensionalen Zahlen, genau den 1. Summanden der Addition der Anzahl Zeichenklassen einer Semiotik über $ZR_{n,n-1}$ ergibt. Da diese Addition aus n-1 Summanden entsprechend $ZR_{n,n-1}$ besteht, erhalten wir die übrigen (n-1)-1 Summanden jeweils dadurch, dass wir jeweils das vorherige Glied, allgemein: beim (n-1)-(m+1)-ten Glied das (n-1)-(m)-te Glied weglassen.

Bibliographie

Flachsmeyer, Jürgen, Kombinatorik. Berlin (DDR) 1969
Toth, Alfred, Zwischen den Kontexturen. Klagenfurt 2008 (2008a)
Toth, Alfred, Semiotics and Pre-Semiotics. 2 Bde. Klagenfurt 2008 (2008b)
Toth, Alfred, Vorarbeiten zu einer objektiven Semiotik. Klagenfurt 2008 (2008c)